NOCIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA PULPOS EN UN DESIERTO 2.1

Ramon Ferrer i Marí

:

Índice

¿PARA QUIÉN ES ESTO? 3
PRELIMINARES. 5
CALENTANDO MOTORES: UNAS PEQUEÑAS NOCIONES DE ÁLGEBRA, PARA SITUARNOS. 7
COMPOTENTES PRINCIPALES DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA 7
TÉRMINO ALGEBRAICO 10
EXPRESIÓN ALGEBRAICA 10
ECUACIONES ALGEBRAICAS 11
OPERACIONES CON POLINOMIOS. LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS. 11
DERIVADAS E INTEGRALES: HERRAMIENTAS INVERSAS. 20
EL CÁLCULO DIFERENCIAL: DERIVADAS SIMPLES 22
MECÁNICA DE RESOLUCIÓN DE LAS DERIVADAS 24
REFRESCANDO LAS OPERACIONES CON FRACCIONES 25
HERRAMIENTAS ÚTILES EN LA ARITMÉTICA DE FRACCIONES CON DERIVADAS 27
DERIVADAS CON FRACCIONES. 30
DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN SIMPLE QUE ESTÁ DIVIDIDA POR UN NÚMERO 36
DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA QUE ESTÁ DIVIDIDA POR UN NÚMERO 37
REGLAS DE DERIVACIÓN: POTENCIA, CADENA, PRODUCTO Y DIVISIÓN O COCIENTE 38
DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN CON RAICES 39
DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y LOGARÍTMICAS 41
INTRODUCCIÓN A LAS INTEGRALES 47
LISTADO DE PROFESORES YOUTUBERS CONSULTADOS EN ESTE ARTÍCULO 60

:

Corregido y supervisado por:

Alexis Daniel Velazquez Uzcategui. Ingeniero Electricista Egresado de la Universidad de Los Andes - Venezuela.

E-mail: velazquezalexis@gmail.com

Versión 2.1 (enero 2024).

:

MATEMÁTICAS PARA PULPOS EN UN DESIERTO.

Camino: acción de caminar o ir a un lugar o propósito determinado

Ruta: camino determinado que va de un sitio a otro. Camino o dirección que se toma para alcanzar un propósito.

"Existe un solo camino, pero con miles de rutas alternativas. Muchas veces no erramos el camino, solamente no elegimos la ruta adecuada a nuestras necesidades particulares, de ese momento de nuestra vida".

"Yo soy, cuando comprendo". *Leonor Martorell, Psicóloga y psicoterapeuta.*

¿PARA QUIÉN ES ESTO?

Este modesto trabajo va enfocado a todas aquellas personas que, en una clase de matemáticas se sienten como un pulpo en un desierto, es decir, completamente fuera de lugar y con una horrible sensación de estar en peligro, claro e inminente, de *perecer* intelectualmente hablando.

Es una sensación de terrible impotencia que el profesor/a esté en la pizarra explicando esto:

Se dice que una función $f: I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, sí existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\epsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leq \epsilon$$

Dicho número L se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange)

Y que a ti te suene a esto:

Creo que no necesita más explicaciones.

Pero la sensación de impotencia es devastadora, terrible: Esa persona, especialmente si hablamos de menores de edad, se puede sentir el ser

:

más tonto del planeta entero, y más viendo como el resto de la clase parece entender lo que el profesor(a) está explicando.

Esto tiene un nombre y se llama *indefensión aprendida*. Visionad este vídeo. No tiene desperdicio: https://youtu.be/OtB6RTJVqPM

En estos tiempos es muy sencillo poner a parir al docente y echarle la culpa de la situación: *"Es que no sabe expresarse, es que no se sabe explicar…".*

Hemos de ponernos en la piel del docente y entender que tiene un tiempo limitado para exponer un temario que debe cumplir. No se puede parar a hacer una explicación a la medida de las necesidades de cada estudiante.

Una escuela no es una modistería, en la que se elaboran vestidos a la medida y gusto de cada clienta. Una escuela es una *Boutique* donde, como mucho, tal y como pasa en la escuela de mi querido primo Jesús, se tienen modelos (asignaturas) en formato *prêt à porter.* Y esto en el mejor de los casos.

Prêt-à-porter es una expresión francesa que significa textualmente *Listo para llevar.* Es decir, tenemos un mismo modelo de vestido, disponible en varias tallas diferentes, con la esperanza de que alguna de ellas le irá bien a su compradora.

En muchas escuelas, las asignaturas se dan como se entregaba la ropa en el ejército español a los reclutas, cuando existía el servicio militar obligatorio: A cada uno se le daba un lote de ropa igual (uniforme) pero luego, el aspirante a soldado se encontraba que los pantalones podían venirle estrechos, el abrigo parka, demasiado largo etc. Y en la escuela no se tiene el recurso de cambiarte, con un compañero, las prendas que no te van.

Repito, esto no es una crítica brutal y salvaje contra los docentes. Me constan los esfuerzos y hasta los sobreesfuerzos que hacen cada día con los críos. Y tienen todo mi cariño y solidaridad.

Pero algo tendremos que hacer con los que se quedan atrás, con esos estudiantes que, devastados por la indefensión aprendida, se sienten como pulpos en un desierto.

:

PRELIMINARES.

Internet se ha convertido en una importante herramienta de aprendizaje. Lo que vais a ver en este trabajo son los apuntes que he tomado y adaptado de un canal de Youtube que se titula "***El Profe***". Os dejo el enlace a sus vídeos.

https://www.youtube.com/watch?v=ZmbXtZDgr4I&list=PL9ZD--BfNPnYYkgWncCOiPP0ii2chQBvX

No pretendo decir que su autor, Don Braulio Mendoza, un inteligentísimo y reputado profesional mexicano, sea el mejor profesor de YouTube que existe. Hay otros profesores YouTubers que tienen su estilo particular y todos son muy dignos.

Pero la prueba irrefutable, aquello que nos demuestra que hemos encontrado el maestro que nos explica las cosas de manera comprensible, es precisamente eso, que aprendamos una materia, en este caso, matemáticas de enseñanza secundaria, que antes nos resultaba árida e incomprensible.

A mí, Don Braulio Mendoza, me sirve. Y **Matemáticas Profe Alex**, también. De hecho, algunas explicaciones y desarrollos, los he tomado de él.

Si a ti no te sirve, no pasa nada. Explora el resto de vídeos de matemáticas de YouTube, hasta que encuentres aquel profesor o profesora que te resulte entendible.

Me acerqué a YouTube con la esperanza de, ahora en mi cincuentena, cuando ya tengo la vida profesional estabilizada, pudiese quitarme esta espinita que tengo en el corazón. Superar las matemáticas de 2º curso de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), fue un ejercicio arduo que me tomó tres cursos académicos. Y aunque las superé y pude ir a la Universidad, debo reconocer que las exigencias profesionales de años posteriores, me han llevado a olvidarlas.

Por eso aprovecho estas líneas para reivindicarme, quitarme aquella espinita y, si en el proceso puedo ayudar a alguien, mejor que mejor. En España, actualmente, Derivadas e Integrales se imparten en el 2º curso del Bachillerato.

Antes que nada, voy a darme el permiso de dar una definición personal sobre para qué sirven las Matemáticas: Son una Herramienta, parecida al rayo Láser, del que un científico dijo que era "*una solución a la búsqueda de un problema que resolver".*

:

Las matemáticas son una ciencia que permite describir la realidad que nos rodea. Lo que pasa es que es una herramienta muy abstracta y cuesta verle la utilidad, desde el pupitre de un colegio.

Veamos un ejemplo:

Sostengo una moneda en mi mano. ¿Qué pasará si la lanzo al aire? Pues lo que nos podemos imaginar, que la moneda ascenderá hasta un punto, se parará y empezará a caer hasta que se estampe contra el suelo.

En términos de energía, desde mi mano y durante todo el recorrido, estará sujeta a dos fórmulas diferentes:

La **Energía potencial** que es la energía que tiene un cuerpo situado a una determinada altura sobre el suelo. Tendrá un valor cuando se halla en mi mano y otro diferente, cuando se pare en el aire, por acción de la fuerza de la gravedad. La fórmula matemática es la siguiente:

$$E_p = mgh$$

siendo $\boldsymbol{m}$ la masa en kg, $\boldsymbol{g}$ la aceleración de la gravedad en m/s^2 y $\boldsymbol{h}$ la altura a la que se encuentra el objeto en m.

Una vez se pare en el aire, ahí tendrá su pico más alto, que irá decreciendo conforme caiga hacia el suelo, transformándose en energía cinética por acción de la gravedad. La energía cinética es una forma de energía, conocida como energía de movimiento. La energía cinética de un objeto **es aquella que se produce a causa de sus movimientos que depende de la masa y velocidad del mismo**. Su fórmula matemática es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

donde $\boldsymbol{m}$ es la masa expresada en kg y $\boldsymbol{v}$ la velocidad en m/s.

Como en la vida, en las matemáticas las cosas suelen estar interconectadas. Por ello empezaremos dando algunas nociones de álgebra y fracciones, imprescindibles para aprender a operar con derivadas e integrales.

:

CALENTANDO MOTORES: UNAS PEQUEÑAS NOCIONES DE ÁLGEBRA, PARA SITUARNOS.

El álgebra es una rama de las matemáticas que utiliza no solo números y signos, sino también letras para resolver operaciones. Se busca hallar el valor numérico de variables denominadas incógnitas. Estas se representan mediante cualquier letra del alfabeto como por ejemplo las más comúnmente usadas "x" e "y".

Vídeo fuente:

https://edu.gcfglobal.org/es/algebra/expresiones-algebraicas/1/

Observa la siguiente expresión:

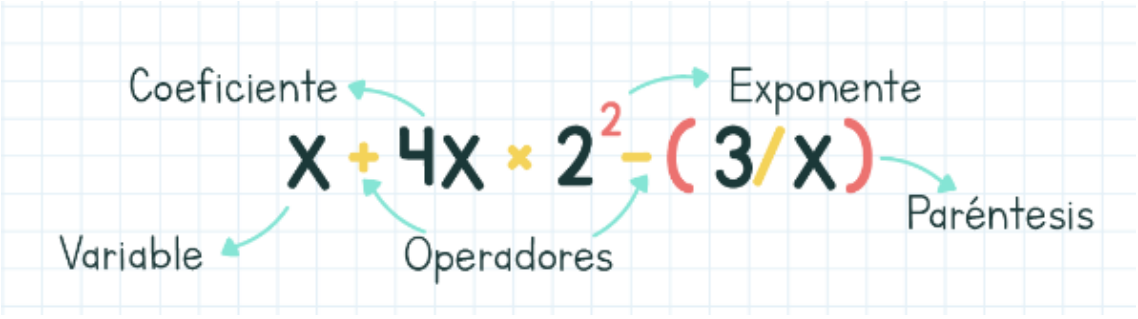
$$x + 4x \times 2^2 - (3/x)$$

Incluye algunos símbolos que son comunes en álgebra, pero no en matemáticas básicas. La forma en que se escriben estas expresiones se llama **notación algebraica**.

Esta notación incluye cinco componentes principales:

COMPOTENTES PRINCIPALES DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

a) **Variables** o **incógnitas**,
b) **Coeficientes**,
c) **Operadores**,
d) **Exponentes**
e) **Paréntesis**.



:

Veamos qué es cada cosa:

Variables o **incógnitas**

La **diferencia** entre **una variable y una incógnita** es que la **variable** es aquella que **pertenece a una expresión algebraica** y la **incógnita** es aquella que **pertenece a una ecuación**. Por lo tanto, la incógnita tendrá un respectivo valor numérico y la variable no siempre tendrá un valor numérico.

Una variable o incógnita es una letra que se usa para representar un número. Por ejemplo, en la siguiente expresión

$$X+2=5$$

la variable X representa un número desconocido que al sumarle 2, nos dará 5.

Expresado como una pregunta sería: ¿a qué número puedes agregarle 2 para que dé 5?

Escribimos X porque, inicialmente, no sabemos cuál será ese número, pero lo podemos averiguar. Como sabemos que 2+3=5, nuestra variable debe ser 3 o, en otras palabras, X=3. Técnicamente lo resolveríamos así:

En X+2=5, pasamos el 2 al otro lado y nos queda X=5-2, con lo que obtenemos como resultado que X=3.

RECUERDA: Cada vez que desplazamos un término al otro lado del signo igual (=), toca cambiar el operador por su inverso. En cristiano: Si está sumando, lo pasaremos restando, y si está multiplicando, lo pasaremos dividiendo, o viceversa.

Coeficientes

son factores multiplicativos, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica. Por ejemplo, 3X = X + X + X, donde 3 es el **coeficiente** de la variable X.

:

Operadores

Son los símbolos que nos indican la operación que debemos realizar. En estos apuntes, haremos servir los siguientes signos:

- Signo de Sumar **+**
- Signo de Restar **–**
- Signo de Multiplicación ·, ×
- Signo de División /, ÷

Exponentes

Indican cuantas veces debemos multiplicar un número por sí mismo. Por ejemplo 2^3 está compuesto por el número 2 que es la base, y el exponente 3 lo que significa que multiplicamos 2 por sí mismo, tres veces, o sea: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Si no aparece ningún exponente se sobreentiende que su valor es 1.

Y podemos añadir que cualquier número (excepto el infinito y el 0) elevado a 0 es 1. Por ejemplo:

$$12^0 = 1 \qquad (-4)^0 \qquad 4{,}56^0$$

Paréntesis

Se usan para agrupar partes de una expresión algebraica. En un problema debes resolver primero las expresiones que están dentro de ellos y acto seguido el resto. Ello significa que hay unas reglas que debes recordar y respetar escrupulosamente. **El orden de prioridad en la resolución** es el siguiente:

1. Paréntesis. (….)

2. Exponentes 3^2

3. Multiplicaciones $(\cdot, \times)$ y divisiones$(/, \div)$ de izquierda a derecha

4. Sumas (+) y restas (-)

Veamos este ejemplo:

$$50/5 \cdot 2 + (6 + 3 \cdot 2) + 64/4^2 - 10$$

:

1º Paréntesis $(6+3\cdot 2)$: Dentro del Paréntesis, primero la Multiplicación $3\cdot 2$ y luego la Suma quedando 6 + 6 = 12 y tras ello nos queda:

$$50/5\cdot 2+12+64/4^2-10$$

2º Exponentes $4^2=4\cdot 4=16$ y ahora nos queda:

$$50/5\cdot 2+12+64/16-10$$

3º Multiplicaciones y Divisiones: de izquierda a derecha nos encontramos con $50/5=10$ que multiplica a 2, esto es $10\cdot 2=20$, luego el tercer término es $64/16=4$, quedando la expresión:

$$10\cdot 2+12+4-10$$

$$20+12+4-10$$

4º Sumas y Restas:

$$20+12+4-10=26$$

TÉRMINO ALGEBRAICO

El término algebraico es una expresión simple donde se combinan letras y números, y no se suman o restan las variables. Por ejemplo:

$$-5x^3$$

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

La expresión algebraica es un conjunto de variables y números que pueden combinarse con distintas operaciones matemáticas, incluso sumas y restas, a diferencia de los términos algebraicos. Un ejemplo puede ser el siguiente:

$$-5x^3+6y$$

Las expresiones pueden expresarse en función al número de términos que las contienen como:

- **Monomio:** Tiene un término: $15z$
- **Binomio:** Posee dos términos: $2x^2-7y$
- **Trinomio:** Tiene tres términos: $3x^2+8y+2z$

:

- **Polinomio:** Cuenta con más de tres términos: $5x^2 - 3y + 6z - 9$

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Una ecuación es la asociación entre dos expresiones algebraicas a través del signo de igualdad. Pueden ser principalmente de dos tipos:

1. **Ecuación de primer grado:** Cuando la variable está elevada máximo a la potencia 1. Se le conoce como ecuación.

$$5x + 5 = 9 - 3x$$

- **Ecuación de segundo grado:** Cuando el exponente máximo de la variable es 2. También se le denomina ecuación cuadrática.

$$3x^2 - 3x = x - 1$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS. LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS.

SUMA DE POLINOMIOS

Se nos pide que procedamos a sumar $x^2 + x - 9$ con $3x^2 - 2x - 6$

Paso 1: Detectar los términos semejantes e ir sumándolos algebraicamente entre ellos.

$$x^2 + 3x^2 = 4x^2 \qquad x - 2x = -x \qquad -9 - 6 = -15$$

Paso 2: colocar los resultados de las operaciones en cada grupo de términos semejantes:

$$4x^2 - x - 15$$

RESTA DE POLINOMIOS

Vamos a usar los mismos polinomios que en la suma: a $x^2 + x - 9$ restar $3x^2 - 2x - 6$

Paso 1: Copiar el primer polinomio: $x^2 + x - 9$

:

Paso 2: Copiar el segundo polinomio **CAMBIANDOLE LOS SIGNOS**.

$-3x^2 + 2x + 6$

Paso 3: Detectar los términos semejantes e ir sumándolos algebraicamente entre ellos.

$x^2 - 3x^2 = -2x^2$ $\quad$ $x + 2x = 3x$ $\quad$ $-9 + 6 = -3$

Paso 4: colocar los resultados de las operaciones en cada grupo de términos semejantes:

$$-2x^2 + 3x - 3$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación de 2 polinomios se realiza término a término, teniendo en cuenta que cada término del primer polinomio se multiplica por cada uno de los términos del segundo polinomio.

Supongamos la siguiente multiplicación de dos expresiones similares a polinomios $(a - b)(x + y - z)$.

Cada termino de $(a - b)$ va a ser multiplicado por cada uno de los términos de $(x + y - z)$.

Operando con el primer término a

$a(x + y - z) = ax + ay - az$

Ahora con el segundo término que es $-b$

$-b(x + y - z) = -bx - by + bz$ y juntando ambos resultados

$(a - b)(x + y - z) = ax + ay - az - bx - by + bz$

Ejemplo 1. Binomio por binomio

$(3x + 2y)(5x - 4y)$

Siguiendo el procedimiento anterior

$3x(5x - 4y) + 2y(5x - 4y)$

$3x \cdot 5x - 3x \cdot 4y + 2y \cdot 5x - 2y \cdot 4y$

:

$15x^2 - 12xy + 10xy - 8y^2$

Simplificando los términos semejantes $-12xy + 10xy = -2xy$ queda:

$15x^2 - 2xy - 8y^2$

Ejemplo 2. Binomio por trinomio

$(-2m^2n + 3m)(-5m + 4m^2n + 6)$

De manera similar que en el ejemplo 1 si tomamos como primer polinomio a $(-2m^2n + 3m)$ entonces cada término de este debe ser multiplicado uno a uno con cada termino de $(-5m + 4m^2n + 6)$.

Comenzando con el primer termino $-2m^2n$

$-2m^2n(-5m + 4m^2n + 6)$

Multiplicando término a término

$(-2m^2n)(-5m) + (-2m^2n)(4m^2n) + (-2m^2n)(6)$

Ordenando signos, números y variables

$- \cdot - \cdot 2 \cdot 5 \cdot m^2m \cdot n + \cdot - \cdot 2 \cdot 4 \cdot m^2m^2n \cdot n + \cdot - \cdot 2 \cdot 6 \cdot m^2n$

Teniendo en cuenta que la multiplicación de signos iguales da positivo y la multiplicación de signos diferentes da negativo y además en la multiplicación de potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes, la expresión queda:

$10m^3n - 8m^4n^2 - 12m^2n$

Ahora con el segundo término

$3m(-5m + 4m^2n + 6)$

$(3m)(-5m) + (3m)(4m^2n) + (3m)(6)$

$-15m^2 + 12m^3n + 18m$

Sumando ambos resultados

$10m^3n - 8m^4n^2 - 12m^2n - 15m^2 + 12m^3n + 18m$

:

Se observa que solo hay un término que se repite y se pueden agrupar algebraicamente, esos términos son:

$10m^3n + 12m^3n = 22m^3n$

El resultado final se obtiene ordenando

$$-8m^4n^2 + 22m^3n - 12m^2n - 15m^2 + 18m$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Sabemos que la división aritmética se compone de un dividendo, un divisor, un cociente y el resto. Es la división que se opera de forma más larga realizando restas al dividendo con el resultado de la multiplicación de un término del cociente por el divisor.

Dividendo (D)	Divisor (d)
Resto (R)	Cociente (C)

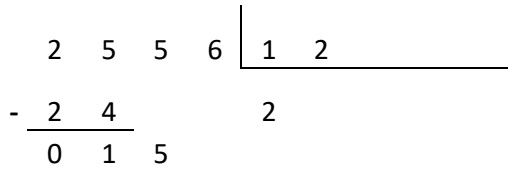
De igual manera se puede operar en la división de polinomios siguiendo un procedimiento que se describe a continuación.

1. Ordenar cada polinomio según el grado de mayor a menor y si falta algún exponente intermedio completar con ceros.
2. Buscar un número o expresión (parte del cociente) que multiplicado por el divisor (polinomio de menor grado) se aproxime a las primeras cifras o a los términos de mayor grado del dividendo (polinomio de mayor grado).
3. Al resultado del paso 1 se le cambia el signo y se coloca bajo el dividendo según corresponda.
4. Realizar la suma algebraica de parte del dividendo con el resultado generado en el paso 3.
5. Se baja el siguiente término o cifra del dividendo al lado del resultado del paso 4.
6. Repetir el procedimiento desde el paso 2.
7. Si no se cumple el paso 5 quiere decir que no existen más términos en el dividendo y la división finaliza siendo el resultado:

$$\frac{D}{d} = \frac{R}{d} + C$$

:

Apliquemos los pasos dividiendo 2556/12. Como es división de números se omite el paso 1.



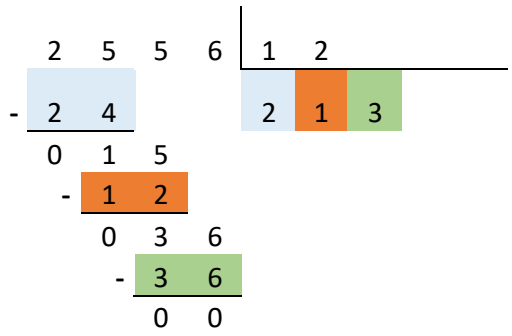
El paso 2 ha sido buscar un número que multiplicado por 12 se aproxime a 25, en este caso el número es 2 que multiplicado por 12 da 24.

El paso 3 nos dice que al resultado del paso 1 se le cambie el signo y se coloque debajo del dividendo en la posición adecuada. En este caso -24 se ha colocado debajo del 25

El paso 4 indica que se realice una suma algebraica, entonces procedemos realizando la operación 25 – 24 que da 01.

El paso 5 amerita que se baje el siguiente número del dividendo que es 5 y se coloque al lado del resultado del paso anterior, lo cual genera un resto inicial de 015.

El paso 6 aconseja revisar si aún existen términos por utilizar en el dividendo y en caso de que sea cierto repetir nuevamente todos los pasos desde el inicio. El resultado aquí se presenta obteniendo un valor de 213 en el cociente y resto ceo, lo que quiere decir que la división es exacta.



Un ejemplo ilustrativo con la siguiente división de polinomios

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x - 5}$$

:

Paso 1. Tanto el polinomio del numerador como el polinomio del denominador están ordenados en función del mayor exponente, sin embargo, se observa en el numerador que falta el termino de grado o exponente 2 el cual se completa con cero.

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \big| \; x - 5$$

Paso 2. En primer lugar, se busca una expresión que multiplicada por x en el cociente de como resultado $5x^3$, esta expresión es $5x^2$ que al multiplicarse por $x-5$ es:

$$5x^2(x-5) = 5x^3 - 25x^2$$

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \big| \; x - 5$$
$$\qquad\qquad\qquad\quad 5x^2$$

Paso 3. El resultado del paso 2 se cambia de signo y se coloca debajo del dividendo en el lugar correspondiente.

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \big| \; x - 5$$
$$-\,5x^3 + 25x^2 \qquad\qquad 5x^2$$

Paso 4. Se suma algebraicamente parte del dividendo y el resto

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \big| \; x - 5$$
$$-\,5x^3 + 25x^2 \qquad\qquad 5x^2$$
$$0 + 25x^2$$

Paso 5. Se baja el siguiente termino para que forme parte del resto.

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \big| \; x - 5$$
$$-\,5x^3 + 25x^2 \qquad\qquad 5x^2$$
$$0 + 25x^2 - 3x$$

Paso 6. Repitiendo los pasos anteriores hasta operar con todos los términos del dividendo se obtiene el siguiente resultado:

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \quad \big| \; x - 5$$
$$-\,5x^3 + 25x^2 \qquad\qquad 5x^2 + 25x + 122$$
$$0 + 25x^2 - 3x$$

:

$$\begin{array}{rrrrr} -25x^2 & + & 125x & & \\ \hline 0 & + & 122x & + & 1 \\ & - & 122x & + & 610 \\ \hline & & 0 & + & 611 \end{array}$$

Paso 7. La división de los polinomios se puede escribir como:

$$\frac{5x^3-3x+1}{x-5}=\frac{611}{x-5}+5x^2+25x+122$$

La división de polinomios es de gran ayuda en el cálculo de integrales de fracciones con polinomios siempre y cuando el grado del numerador sea mayor que el grado del denominador.

Veamos 2 ejemplos de divisiones exactas

Ejemplo 1. $(2x+3x^2-8)\div(x+2)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^2 & + & 2x & - & 8 & x + 2 \\ \hline -3x^2 & - & 6x & & & 3x - 4 \\ \hline 0 & - & 4x & - & 8 & \\ & + & 4x & + & 8 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

En este ejemplo se ordenó el polinomio dividendo de acuerdo al exponente de mayor a menor.

$2x+3x^2-8=3x^2+2x-8$

Los términos escogidos para la multiplicación en cada repetición de los 7 pasos son:

Término	Multiplicación	Resultado	Cambio de signo
$3x$	$3x(x+2)$	$3x^2+6x$	$-3x^2-6x$
-4	$-4(x+2)$	$-4x-8$	$+4x+8$

El resultado de la división exacta es $3x-4$

Ejemplo 2. $(6x^2-2y^2-xy)\div(y+2x)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^2 & - & xy & - & 2y^2 & 2x + y \\ \hline -6x^2 & - & 3xy & & & 3x - 2y \end{array}$$

:

$$\begin{array}{rrrr} & & & \\ \hline 0 & -4xy & - & 2y^2 \\ & +4xy & + & 2y^2 \\ \hline & 0 & & \end{array}$$

En este ejemplo tenemos polinomios con diferentes variables. Se han ordenado los polinomios comenzando con la variable x desde su grado mayor hasta el menor y luego se ha ordenado la variable y.

$6x^2 - 2y^2 - xy = 6x^2 - xy - 2y^2$

$y + 2x = 2x + y$

Los términos escogidos para la multiplicación en cada repetición de los 7 pasos son:

Término	Multiplicación	Resultado	Cambio de signo
$3x$	$3x(2x+y)$	$6x^2+3xy$	$-6x^2-3xy$
$-2y$	$-2y(2x+y)$	$-4xy-2y^2$	$+4xy+2y^2$

Ejemplo 3. División de polinomios con exponentes no consecutivos

Un polinomio puede tener exponentes no consecutivos. Para dividir es aconsejable dejar espacios en blanco o completar con ceros en aquellos términos correspondientes a los exponentes faltantes.

Sea $1 - a - a^5 - 3a^2 \div 1 + 2a + a^2$ una división de polinomios donde se observa que los exponentes del polinomio dividendo no son consecutivos, faltando los términos de grado 4 y 3. Siguiendo a detalle los 7 pasos descritos en esta sección la división es:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l} -a^5 & +0a^4 & +0a^3 & - & 3a^2 & - & a & + & 1 & & a^2+2a+1 \\ \hline +a^5 & +2a^4 & +a^3 & & & & & & & & -a^3+2a^2-3a+1 \\ \hline 0 & +2a^4 & +a^3 & - & 3a^2 & & & & & & \\ & -2a^4 & -4a^3 & - & 2a^2 & & & & & & \\ \hline & 0 & -3a^3 & - & 5a^2 & - & a & & & & \\ & & +3a^3 & + & 6a^2 & + & 3a & & & & \\ \hline & & 0 & + & a^2 & + & 2a & + & 1 & & \\ & & & - & a^2 & - & 2a & - & 1 & & \\ \hline & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

En resumen, los términos de los polinomios se ordenan de mayor a menor grado y a la vez se completan con ceros los términos faltantes.

:

$1 - a - a^5 - 3a^2 = -a^5 + 0a^2 + 0a^3 - 3a^2 - a + 1$

$1 + 2a + a^2 = a^2 + 2a + 1$

Los términos correctos para la multiplicación con el divisor en cada repetición de los 7 pasos son:

Término	Multiplicación	Resultado	Cambio de signo
$-a^3$	$-a^3(a^2 + 2a + 1)$	$-a^5 - 2a^4 - a$	$a^5 + 2a^4 + a$
$2a^2$	$2a^2(a^2 + 2a + 1)$	$2a^4 + 4a^3 + 2a^2$	$-2a^4 - 4a^3 - 2a^2$
$-3a$	$-3a(a^2 + 2a + 1)$	$-3a^3 - 6a^2 - 3a$	$3a^3 + 6a^2 + 3a$
1	$a^2 + 2a + 1$	$a^2 + 2a + 1$	$-a^2 - 2a - 1$

Ejemplo 4. División de polinomios con términos variados

Un polinomio también puede tener términos variados, es decir, con diferentes combinaciones de letras. En este caso los polinomios deben ser ordenados por la letra o variable de mayor grado hasta su grado menor. Una vez terminado el orden de la primera variable proceder de igual manera con las restantes.

Sea $12a^3 + 33ab^2 - 35a^2b - 10b^3 \div 4a - 5b$ una división de polinomios donde se observan dos variables. Como ya sabemos conviene siempre el primer paso que indica ordenar términos de acuerdo al grado de los exponentes de mayor a menor.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
12a^3 & - & 35a^2b & + & 33ab^2 & - & 10b^3 & 4a - 5b \\
\cline{8-8}
-\,12a^3 & + & 15a^2b & & & & & 3a^2 - 5ab + 2b^2 \\
\cline{1-3}
0 & - & 20a^2b & + & 33ab^2 & & & \\
 & + & 20a^2b & - & 25ab^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 0 & + & 8ab^2 & - & 10b^3 & \\
 & & & - & 8ab^2 & + & 10b^3 & \\
\cline{4-7}
 & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Una manera de dar el resultado de la división es:

$$\frac{12a^3 + 33ab^2 - 35a^2b - 10b^3}{4a - 5b} = 3a^2 - 5ab + 2b^2$$

:

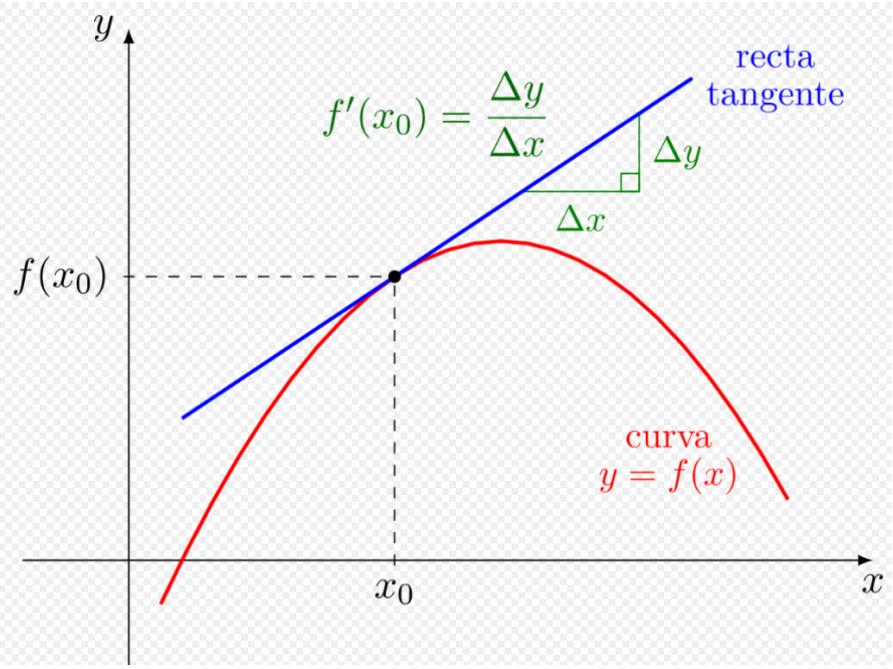
Ejemplo 5.

$32n^2 - 54m^2 + 12m \cdot n \div 8n - 9m$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-54m^2 & + & 12m \cdot n & + & 32n^2 & -9m + 8n \\
\cline{6-6}
+54m^2 & - & 48m \cdot n & & & 6m + 4n + 2b^2 \\
\cline{1-3}
0 & - & 36m \cdot n & + & 32n^2 & \\
 & + & 36m \cdot n & - & 32n^2 & \\
\cline{2-5}
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

DERIVADAS E INTEGRALES: HERRAMIENTAS INVERSAS.

Una derivada es una herramienta matemática que nos describe el ritmo de cambio de cualquier función en un determinado punto o instante. Por eso se habla del valor de la derivada de una función en un punto dado. Esto sirve a una generalidad de usos en física, en ingeniería (rama que es la aplicación práctica de la física), arquitectura y otros muchos.



Autor: Cristian Quinzacara. Representación gráfica de una función. La derivada de la función en el punto marcado es equivalente a la pendiente de la recta tangente. Wikipedia.

:

Poniéndonos muy puristas, tiramos de definición y decimos:

"El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. La recta tangente es, a su vez, la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto".

A ver, estoy empezando a ponerme repelentemente abstracto, así que vamos a dar un ejemplo procedente de una rama de la física que se llama cinemática.

Nos salimos al balcón de casa y, sacando a pasear nuestra *vena macarra,* tiramos a la calle la horterada de jarrón que nos regaló la tía Romualda, las navidades pasadas. Eso sí, previamente, nos aseguramos de no darle en plena cabeza a ningún pobre peatón.

Hasta que la odiosa pieza de porcelana termine hecha añicos sobre la acera, en su camino hacia la perdición, el jarrón no sólo irá ocupando diferentes alturas respecto del tiempo, sino que, además, lo hará con una velocidad creciente, es decir que irá cayendo cada vez más rápido. Es decir, que tenemos dos elementos diferentes, íntimamente ligados entre sí, que son la velocidad y la aceleración.

A esto se le define como *caída libre* que, en cinemática, es un caso particular del llamado *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*

Eso lo podemos describir como la altura respecto del tiempo, con la función: $\boldsymbol{y(t)}$ siendo $\boldsymbol{y}$ la altura y $\boldsymbol{t}$, el tiempo.

La **velocidad** $\boldsymbol{v}$ la describiremos con la derivada $\frac{dy}{dt}$ es decir, la derivada de la altura respecto del tiempo.

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Si queremos definir la **aceleración** $\boldsymbol{a}$, que es el ritmo del incremento de la velocidad a la que cambia la velocidad del jarrón respecto del tiempo, haremos la **segunda derivada** de la altura $\boldsymbol{y}$, es decir, volvemos a derivar respecto del tiempo. En otras palabras, es la segunda derivada de la altura y con respecto al tiempo t dos veces.

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Observando la expresión de la aceleración, esta también es definida como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

En el ejemplo físico del jarrón en caída libre la aceleración toma un valor constante de 9,8 m/s^2 y es conocida como aceleración de la gravedad.

EL CÁLCULO DIFERENCIAL: DERIVADAS SIMPLES

En una derivada tenemos tres partes:

1) La **variable o incógnita**, que es una letra que se usa para representar un número.
2) El **exponente,** que indica cuantas veces debemos multiplicar un número por sí mismo.
3) El **coeficiente**, que es un factor multiplicativo, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica. Por ejemplo, $3x = x + x + x$, donde 3 es **coeficiente** de la variable x.

En una derivada la idea es hacer más pequeña una función en grado. Pero no lo podemos hacer por las bravas, hay que seguir unas reglas para lograrlo. Empecemos:

Primer Caso: La función potencia más básica de todas

Sea x^3 que está compuesta por la variable o incógnita x, y el exponente 3 lo que significa que multiplicamos X por sí misma, tres veces, o sea: $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

Para hallar la derivada de la potencia x^3, el exponente 3 pasa a multiplicar a la x y luego el nuevo exponente de x disminuye una unidad.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

En general si tenemos una función $f(x) = x^n$ su derivada de denota como $f'(x)$ y se calcula según la siguiente expresión:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Más ejemplos de lo mismo:

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
x^2	$2x$
x^4	$4x^3$

:

x^6	$6x^5$
x^8	$8x^7$

Segundo caso: La función potencia viene acompañada de un número o coeficiente

En este segundo caso nos encontramos que la función viene acompañada de un coeficiente. Lo haremos prácticamente igual pasando el exponente a multiplicar a ese coeficiente y el grado del nuevo exponente disminuye en una unidad.

Sea $f(x) = 6x^5$ entonces,

$f'(x) = 5 \cdot 6x^{5-1} = 30x^4$

$f(x)$	$f'(x)$	
$3x^4$	$4 \cdot 3x^{4-1}$	$12x^3$
$5x^7$	$7 \cdot 5x^{7-1}$	$35x^6$
$4x^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{4} \cdot 4x^{\frac{1}{4}-1}$	$4x^{-\frac{3}{4}}$

Tercer caso: Cuando tenemos solo la X, lo podemos ver como un caso particular y la derivada de X es igual a 1. Esto se deduce igualmente con la derivada de una potencia.

$$f(x) = x = x^1 \qquad f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Cuarto caso: La derivada de un número siempre es igual a 0. No importa si ese número es 5 o 5.000.000.000.000 (5 Billones). Se le llama "*CONSTANTE*", porque nunca cambia: Un 5 siempre es un 5, un 29 siempre es un 29. Se le representa como una "*C*" o una "K". El ¿por qué? lo veremos enseguida. De momento quedaos con este ejemplo:

$y = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 10$

$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 5x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 5x^{1-1} + 0$

$\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x - 5$

Aquí es donde toca introducir un concepto llamado *Primitiva.* Y no, no estamos hablando de una mujer que perteneció al grupo evolutivo de los cromañones o de mi estimada, simpática e inteligentísima amiga, María Primitiva Sánchez Martínez, a quien la vida llevó a vivir al Principado de Asturias y a la que mando un cariñoso abrazo.

:

A riesgo que algún matemático fundamentalista me parta la cara, dejo de lado la definición ortodoxa[1] (que cuesta Dios y ayuda entender a la primera) y paso a explicarlo en un castellano sencillito:

Si tenemos *varias* funciones que, al derivarlas, coinciden en el mismo resultado, a esas funciones las llamaremos *PRIMITIVAS*[2]. Y ahora veamos un par de ejemplos:

La derivada $\frac{dy}{dx} = 20x^3$ tiene varias funciones que, al derivarlas, nos dan esa misma derivada, a las que llamaremos primitivas.

DERIVADA $f'(x)$	FUNCIONES PRIMITIVAS $f(x)$
$20x^3$	$5x^4$
	$5x^4$-7
	$5x^4$+2
	$5x^4$+30

De manera que podemos definir una forma genérica de escribir a todas esas múltiples funciones que, al derivarlas, nos dan la derivada $20x^3$. Esa forma es:

$$f(x) = 5x^4+C$$

Hecha esta importante sección, para explicar de dónde puñetas viene la constante C, volvamos a las derivadas.

MECÁNICA DE RESOLUCIÓN DE LAS DERIVADAS.

Vamos a resolver una derivada de manera lenta, que se vean todos los pasos que toca hacer para resolverla:

$$y = 12x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 5x + 10$$

$$y' = 5 \cdot 12x^{5-1} - 4 \cdot 3x^{4-1} + 3 \cdot 8x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 1 \cdot 5x^{1-1} + 0$$

[1] Sea f(x) una función real de variable real definida en un intervalo cerrado [a, b]⊆R. Se llama función primitiva de f(x) a otra función F(x) cuya derivada es f(x) en dicho intervalo.

[2] SPOILER: A ese conjunto de primitivas se le llama INTEGRAL INDEFINIDA. Pero ya llegaremos a eso.

:

$$y' = 60x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 4x^1 + 5x^0 + 0$$

$$y' = 60x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 4x + 5 \cdot 1 + 0$$

Y aunque con este aspecto está intrínsecamente correcta, por costumbre, cuando tenemos una constante (10, en este caso) cuya derivada es 0, éste 0 no se pone, con lo que el resultado final de la derivada, así en plan bonito, y con la ropa de los domingos, sería:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 60x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 4x + 5$$

🤔 Dudas de principiante: Si la derivada de un número es 0 ¿Por qué no eliminamos del resultado final el 5, además del 0? Pues precisamente por eso, porque el 5 final procede de derivar $5x$. Ese 5 sólo desaparecerá si hacemos la segunda derivada, es decir, si derivamos la derivada que hemos obtenido.

Veámoslo:

1ª Derivada o derivada que hemos obtenido:

$$y' = 60x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 4x + 5$$

2ª Derivada:

$$y'' = 240x^3 - 36x^2 + 48x - 4$$

REFRESCANDO LAS OPERACIONES CON FRACCIONES

Como hicimos anteriormente con las nociones de álgebra, hay que recordar un poquito las reglas de operación de las fracciones, antes de meternos a derivar con fracciones. Toca aclarar que la parte de arriba se llama numerador y la parte de abajo se llama denominador.

$$\text{fracción} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$ Por ejemplo: $\frac{5}{2}$

:

- Suma de fracciones con diferente denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a\cdot d)+(b\cdot c)}{(b\cdot d)}$$

- Suma/Resta de fracciones con igual denominador: Se conserva el denominador y se suman o se restan los numeradores directamente.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

- Resta de fracciones con diferente denominador: Se multiplican, en cruz, cada numerador con su denominador opuesto, y se restan entre ellos. Lo que salga se tiene que dividir por el producto de ambos denominadores.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a\cdot d)-(b\cdot c)}{(b\cdot d)}$$

- Multiplicación de fracciones: Se multiplican entre sí, los numeradores y los denominadores, cada uno por su lado.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{(a\cdot c)}{(b\cdot d)}$$

- División de fracciones: Se multiplican en cruz y luego se dividen entre sí.

:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d)}{(b \cdot c)}$$

HERRAMIENTAS ÚTILES EN LA ARITMÉTICA DE FRACCIONES CON DERIVADAS

Por aquello de "*fer cultureta*" que decimos en Catalunya, es decir, ampliar los conocimientos, he explicado arriba las operaciones principales y más básicas que se hacen con fracciones.

De todos modos, aclarar que las operaciones que usaremos principalmente, en las derivadas con fracciones, son la suma y resta de fracciones de igual denominador y las multiplicaciones, por eso van destacadas en este amarillo tan chillón.

Pero hay otras herramientas básicas que debemos conocer y/o recordar.

Una fracción en la que las cifras del numerador y denominador coinciden, es siempre es igual a 1. Se llaman "fracciones iguales a la unidad".

$$\frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{36}{36} = 1$$

ALERTA SPOILER: Por favor, quédate con esta "*copla*" porque nos va a venir de perlas, en cuanto nos metamos con el tema de las derivadas con fracciones.

Te cuento: Puesto que como la segunda cosa que nos piden en la derivada de una potencia es reducir el exponente en una unidad, es decir, en 1, y cuando se trata de un exponente en forma de fracción ese 1 que se le debe restar, siempre lo podemos expresar como una fracción igual a la unidad, con lo que el paso de reducir el exponente en un grado, lo convertimos en una simple resta de fracciones de igual denominador, por lo que conservaremos abajo el denominador (2), mientras que arriba, simplemente, restaremos el numerador (5) menos el denominador (2).

Ejemplo:

$$y = x^{\frac{5}{2}} \qquad y' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{5-2}{2}}$$

:

$$y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

En forma general:

$$y = x^{\frac{a}{b}} \qquad y' = \frac{a}{b}x^{\frac{a-b}{b}}$$

Una solución más simple que la electrónica de un botijo.

https://www.65ymas.com/consejos/porque/por-que-el-botijo-es-un-sistema-perfecto-de-refrigeracion-y-esta-casi-en-desuso_5543_102.html

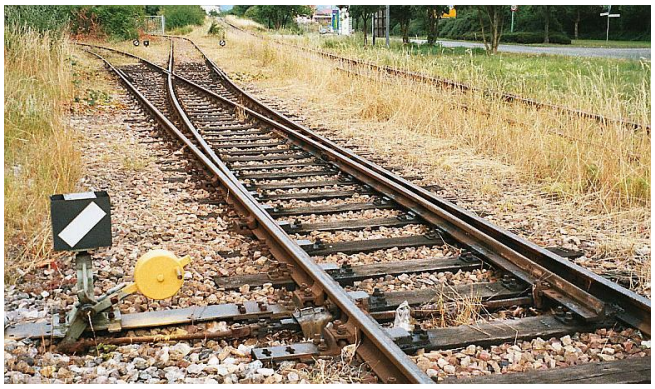
Multiplicación de un número por una fracción.

Estad muy atentos/as porque esta herramienta tiene dos variantes y todas son útiles e importantes. Primero empecemos por lo básico.

Tenemos un número multiplicando una fracción, por ejemplo:

$$a \cdot \frac{b}{c} \qquad 3 \cdot \frac{2}{3}$$

Para resolverlo se nos abren dos vías: una lenta y otra rápida.



:

No te preocupes, que te voy a explicar ambas.

Aconsejo que empieces por la lenta y, cuando tengas práctica, ya tomarás la vía rápida cuando toque.

VÍA LENTA: Lo que hacemos es colocar un 1 bajo el número, y procedemos a multiplicar, como si tal cosa

$$\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{1\cdot c} \qquad \frac{3}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 5}=\frac{6}{5}$$

Siempre que la fracción lo permita, debemos recurrir a la máxima simplificación y para ello tenemos dos formas de hacerlo:

Forma 1: Dividir el numerador entre el denominador. Así pues, si dividimos 6 entre 3, nos da 2.

$$\frac{6}{3}=2$$

Forma 2: Podemos encontrarnos que, si dividimos el numerador entre el denominador, no nos dé un número entero. Pero como debemos buscar el número más pequeño de la fracción, hemos de mirar a ver si podemos dividir el numerador y el denominador entre un mismo número. A esta acción se le llama *simplificación.*

Por ejemplo:

Si tenemos $\frac{45}{35}$ podemos dividir numerador y denominador entre 5 y nos queda $\frac{9}{7}$ y lo dejamos así, porque no podemos seguir simplificándolo.

VÍA RÁPIDA: Esta vía es un auténtico "*chollo*", por lo rápida y sencilla que es, pero tiene una limitación: Solamente podemos usarla si el numerador y el denominador de la fracción COINCIDEN o si un número que multiplica a una fracción coincide con el denominador de esa fracción.

Así pues, lo que hacemos es que realizamos una simplificación a lo bestia, sin anestesia ni nada, porque al coincidir el número y el denominador, entre ellos "*se anulan*". Lo correcto es darse cuenta que si un número en el numerador es igual a un número en el denominador el resultado es 1.

$$\frac{a}{a}=1 \qquad \frac{5}{5}=1$$

:

Volviendo al ejemplo que hemos usado en la Forma 1:

$$3 \cdot \frac{2}{3}$$

Como el 3 está multiplicando y coincide con el 3 que está dividiendo en el denominador de la fracción, simplemente es 1 y es por esto que a lo bestia se acostumbra a decir que se anulan los números o términos en caso de ecuaciones.

$$3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{3} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = 2$$

DERIVADAS CON FRACCIONES.

Las derivadas pueden incorporar fracciones. Por eso he invertido las cinco páginas anteriores en explicar cómo se usan.

Empecemos por una Derivada con una fracción en el exponente:

Sea $y = x^{3/4}$

Primero, tenemos que pasar el exponente al coeficiente

$\frac{3}{4}x$

En segundo lugar, hay que bajar en 1 el grado del exponente:

$\frac{3}{4} - 1$

Pero ese 1 lo podemos expresar como $\frac{4}{4}$ por lo que si hacemos la resta de fracciones de igual denominador tenemos que:

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Por lo que finalmente obtenemos:

$$y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

:

Más de lo mismo (paso a paso, como en el ejemplo anterior)

$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$

$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

La Forma ágil es un atajo mental: No olvidemos que estamos haciendo una resta de fracciones de igual denominador, por lo que conservaremos abajo el denominador (2), mientras que arriba restaremos el numerador (5) menos el denominador (2).

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \qquad \frac{5}{2} - 1 = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$$

Otro ejemplo (ya lo hemos visto en la página 16 y aquí lo aplicaremos al coeficiente).

Sea $y = 3\,x^{2/3}$

Primer paso: trasladamos el exponente original al coeficiente y lo multiplicamos por el número que hay, que es un 3.

$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ Observando rapidamente que $\frac{3}{3} = 1$

Segundo paso: reducimos el exponente que es $2/3$ en una unidad, respetando el denominador y lo incorporamos a la derivada en el exponente.

$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$

El resultado final nos quedará así

$$y' = 2x^{-\frac{1}{3}}$$

A continuación, el Profe Don Braulio Mendoza, propone tres ejercicios con derivadas que también os dejo, pero antes aconsejo que miréis de resolverlos por vosotros/as mismos/as. Una vez lo tengáis acabado, podéis contrastarlo en las páginas siguientes. Venga animaos a

:

resolverlo que como en el famoso chiste del candidato a un empleo al que le preguntan:

"¿Domina usted el inglés?" a lo que responde: *"Si es bajito y se deja…"* pues esta derivada se deja, así que a por ella

Ejercicios Propuestos

1. $y = 2x^{1/3} - 5x^{4/5} + 3x^{1/2}$

2. $y = \frac{3}{2}x^{1/3} + \frac{5}{2}x^{2/3}$

3. $y = \frac{2}{5}x^{1/3} + \frac{3}{4}x^{2/5}$

Solución a los ejercicios propuestos

Ejercicio 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-2/3} - 4x^{-1/5} + \frac{3}{2}x^{-1/2}$$

Ejercicio 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-2/3} + \frac{5}{3}x^{-1/3}$$

Ejercicio 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{15}x^{-2/3} - \frac{3}{10}x^{-3/5}$$

La siguiente tabla muestra las leyes de exponentes Las igualdades van en los dos sentidos, es decir, podemos aplicarlas de izquierda a derecha, como de derecha a izquierda:

1	$a^0 = 1 \quad a \neq 0$	$3^0 = 1$
2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
5	$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^2)^3 = 3^{2.3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
7	$(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$	$(2 \, x \, 3)^2 = 2^2 \, x \, 3^2$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

:

Fuente: El Blog del profesor Alex. https://profe-alexz.blogspot.com/2012/10/teoria-de-exponentes-ejercicios.html

Vamos a trabajar con las siguientes:

2	$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$	$2^3 x 2^2 = 2^{3+2}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
4	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$

Si te estás preguntando el ¿por qué? de este inciso, es muy sencillo: No siempre te vas a encontrar la derivada, limpia de polvo y paja, lista para que la puedas derivar, como un señor/a.

Muchas veces te vas a encontrar con un auténtico "***morlaco"*** (Toro de lidia, de gran tamaño, fiero y con unos cuernos enormes) matemático de este calibre:

$$Y = x\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$$

Y a ver cómo lo "*toreas*" …

Que no cunda el pánico. El secreto consiste en que, antes de empezar a derivar, debemos de someterlo a una serie de "*arreglos previos*", como cuando una mujer se compra un vestido bonito, pero lo lleva a la modista a que se lo arregle, de aquí y de allá, para que le ajuste como un guante y sea la más guapa de la fiesta.

Volviendo al *morlaco matemático,* vamos a *torearlo*:

:

Fuente: Diario ABC. El torero José Tomás brindando el toro al respetable, en la Feria de Jerez.

Como ya he dicho antes, lo primero es "*arreglar*" la función para poder derivarla y para ello nos apoyaremos en las leyes de exponentes:

Paso 1: Arreglamos

$x\sqrt{x}$

Usando $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ nos queda

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2}$

Luego usando $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$

Paso 2: Arreglamos $-\frac{2}{x^2}$ usando $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pero a la inversa (de derecha a izquierda) y nos queda:

$-\frac{2}{x^2} = -2x^{-2}$

Nota importante: Aunque la formula, en genérico, habla de $\frac{1}{a^n}$ ese 1 no es inamovible y, de hecho, toca cambiarlo por la cifra que aparezca en el numerador, tal y como hemos hecho ya.

El + 5 no hay que arreglarlo, así que no lo tocamos y nos queda:

$y = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + 5$

Esta función ya se puede derivar fácilmente con lo visto hasta ahora.

$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - (-2) \cdot 2x^{-2-1} + 0$

$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-3}$

En este punto nuevamente podemos aplicar las funciones inversas $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ y $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ quedando así la derivada:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{x^3}$$

:

Vamos ahora con la "*segunda función de la tarde*", que tiene este aspecto:

$$y = \frac{\sqrt{x^3}}{2x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 2x\sqrt[3]{x}$$

Como podéis ver, esta función necesita más arreglos que el traje de comunión de Tarzán, así que vamos al lío:

Paso 1: Arreglamos $\frac{\sqrt{x^3}}{2x}$

Usando: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

y:

$$\frac{\sqrt{x^3}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

Usando: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{2x} = \frac{x^{3/2}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot x^{-1} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-1}}{2}$$

Por último, usando $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{2x} = \frac{x^{3/2}}{2x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot x^{-1} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-1}}{2} = \frac{x^{\frac{3}{2}-1}}{2} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

Paso 2: Arreglamos $\frac{5}{\sqrt{x}}$

Usando $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicando: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = 5 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 5x^{-\frac{1}{2}}$$

Paso 3: Arreglamos $2x\sqrt[3]{x}$

:

Usando $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$2x\sqrt[3]{x} = 2x \cdot x^{\frac{1}{3}}$

Utilizando $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$2x\sqrt[3]{x} = 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot x^{1+\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{4}{3}}$

Luego:

$$y = \frac{\sqrt{x^3}}{2x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 2x\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{4}{3}}$$

Y su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{4}{3} \cdot 2x^{\frac{4}{3}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

Y si aplicamos nuevamente las funciones inversas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x^3}} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3}$$

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN SIMPLE QUE ESTÁ DIVIDIDA POR UN NÚMERO.

En este caso, tenemos dos vías diferentes:

a) DERIVAR DIRECTAMENTE TODA LA FUNCIÓN SIMPLE (NUMERADOR) RESPETANDO EL NÚMERO DEL DENOMINADOR: LO QUE SALGA, SE DEJA COMO ESTÁ.
b) INDIVIDUALIZAR CADA TÉRMINO DE LA FUNCIÓN SIMPLE COMO UNA FRACCIÓN E IRLO DERIVANDO: A LO QUE SALGA, SE LE APLICA LA NORMA DE REDUCIR LA FRACCIÓN A SU MENOR EXPRESIÓN.

Veamos un ejemplo

$$f(x) = \frac{9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6}{3}$$

:

La función está dividida por una constante igual a 3 o también se puede ver como que la función está multiplicada por una constante igual a 1/3. Esto es:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6)$$

Cuando se trata de calcular derivadas que están multiplicadas o divididas por una constante, esta queda igual y se deriva la función variable.

La derivada sería:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx}(9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot 9x^{4-1} - 3 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 7x^{2-1} - 2x^{1-1} + 0)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (36x^3 - 9x^2 + 14x - 2)$$

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA QUE ESTÁ DIVIDIDA POR UN NÚMERO.

Aquí la cosa ya se complica, ya que pasamos de una función simple, por ejemplo

$$g(x) = \frac{3x + 1}{2}$$

A una función compuesta como

$$f(x) = \frac{(4x + 1)^2}{3}$$

Y aquí la cosa cambia como de la noche al día. Ya no podemos operar directamente, sino que necesitamos tirar de una fórmula específica para ello. Esta fórmula es:

$$du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$$

A esta fórmula se le llama "Regla de la Cadena" y es una de las 4 reglas de derivación que veremos luego.

:

Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=aVNa-J8iB5I Ing E Darwin

REGLAS DE DERIVACIÓN: POTENCIA, CADENA, PRODUCTO Y DIVISIÓN O COCIENTE

Derivada de una potencia

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Sea $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$

Entonces

$f'(x) = 3 \cdot 4x^{3-1} - 1 \cdot 2x^{1-1} + 0 = 12x^2 - 2x^0$

$f'(x) = 12x^2 - 2$

Regla de la cadena

$du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$

Es una regla muy importante. La regla de la cadena casi siempre funciona cuando tenemos un paréntesis con una operación por fuera (Exponencial, seno, coseno, logaritmo, potencia, …). Dicho de una manera más fácil es multiplicar la derivada de lo de afuera $(2x-8)^4$ por la derivada de lo de adentro $2x - 8$.

$Sea\ f(x) = (2x-8)^4$ primero vamos a hacer las dos derivadas por separado

$n \cdot u^{n-1} = 4 \cdot (2x-8)^{4-1} = 4 \cdot (2x-8)^3$ *va a ser la derivada de lo de afuera.*
$u = 2x^1 - 0 = 2$ va a ser la derivada de lo de adentro, es decir, sin el exponente.

Una vez las tenemos hechas por separado, las juntamos en la fórmula $du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot du$:

$$f'(x) = 4 \cdot (2x-8)^{4-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x-8) = 4 \cdot (2x-8)^3 \cdot 2$$

$f'(x) = 8 \cdot (2x-8)^3$

$8 \cdot 2 \cdot (x-4)$

$f'(x) = 16(x-4)$

Derivada de un Producto

$$f = u \cdot v \qquad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

:

$f(x) = (2x^3 + 5x)(-x^5 + 3x^2)$

Esta función es de la forma $f = u \cdot v$ donde:

$u = 2x^3 + 5x$

$v = -x^5 + 3x^2$

Luego las derivadas de u y v son:

$u' = 6x^2 + 5$

$v' = -5x^4 + 6x$

Sabemos que $f(x)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f'(x) = (6x^2 + 5)(-x^5 + 3x^2) + (2x^3 + 5x)(-5x^4 + 6x)$

Derivada de un cociente

$$f = \frac{u}{v} \qquad\qquad f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{-x^5 + 3x^2}$$

Esta función es de la forma $f = \frac{u}{v}$ donde:

$u = 2x^3 + 5x$

$v = -x^5 + 3x^2$

Luego las derivadas de u y v son:

$u' = 6x^2 + 5$

$v' = -5x^4 + 6x$

Sabemos que $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 5)(-x^5 + 3x^2) - (2x^3 + 5x)(-5x^4 + 6x)}{(-x^5 + 3x^2)^2}$$

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN CON RAICES

No os asustéis, parecen más difíciles de lo que en realidad son. Primero recordemos un poco la mecánica básica de la operación con raíces:

:

6	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1}$
3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Sea $y = \sqrt{2x+1}$ podríamos tirar de la Regla de la Cadena, aplicando las fórmulas de exponentes que tenemos y nos saldría

$$y' = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2+0)$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Finalmente

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

A ver, lo que hemos hecho está intrínsecamente bien, lo que pasa es que algún matemático inteligente, le dio a la sesera a base de bien y encontró un atajo, la mar de apañado, en forma de fórmula, tal que así:

$$d\sqrt{v} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot dv$$

Así que volvemos a la raíz del ejemplo anterior, que era

$$y = \sqrt{2x+1}$$

Y aplicando la nueva fórmula tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Como podemos ver es la mitad de pasos más corto y directo. Veamos otro ejemplo.

$$y = \sqrt{7x^2 + 2x - 3}$$

:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} \cdot \frac{d}{dx}(7x^2+2x-3) = \frac{1}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} \cdot 14x + 2$$

$$y' = \frac{14x+2}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} = \frac{2(7x+1)}{2\sqrt{7x^2+2x-3}}$$

$$y' = \frac{(7x+1)}{\sqrt{7x^2+2x-3}}$$

Un ejemplo más Sea y= $\sqrt{9x^2}$+10x-2

$$y = \sqrt{9x^2+10x-2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{9x^2+10x-2}} \cdot (18x+10) = \frac{2(9x+5)}{2\sqrt{9x^2+10x-2}}$$

$$y' = \frac{9x+5}{\sqrt{9x^2+10x-2}}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y LOGARÍTMICAS

Estas derivadas exceden con mucho mi intención en estos sencillos apuntes.

Quien quiera aprender a operar con ellas, le remito a los vídeos correspondientes en Youtube y que aparecen al final de esta obra.

O con el profesor Youtuber que más le aclare las cosas.

De todos modos, y como colofón y fin de fiesta de las derivadas, os dejo unas tablas finales procedentes de:

https://www.funciones.xyz/tabla-de-derivadas/

LA TABLA DE LAS DERIVADAS.

La **tabla de derivadas** es un listado con las derivadas que más se utilizan y que, por lo tanto, son importantes de recordar. De modo que la tabla de derivadas ayuda a memorizar todas las fórmulas de las derivadas.

Índice

1. Tabla de derivadas inmediatas
2. Tabla de derivadas compuestas
3. Tabla de derivadas trigonométricas

:

4. Tabla de operaciones con derivadas
5. Tabla de derivadas completa

1. Tabla de derivadas inmediatas

A continuación, puedes ver la tabla de derivadas de las funciones más elementales. En la tabla también puedes ver un ejemplo resuelto de cada tipo de derivada para que te ayude a comprender cómo se hace la derivada de la función.

Solo añadir que este tipo de derivadas también se conocen como derivadas directas.

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = 7x \rightarrow f'(x) = 7$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 4^x \rightarrow f'(x) = 4^x \cdot \ln(4)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \log_5(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(5)}$
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$	$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

En esta tabla de derivadas se incluye la derivada de una constante, la derivada de una función lineal, la derivada de una potencia, la derivada de una raíz, la derivada de una función exponencial y la derivada de una función logarítmica, entre otras.

:

2. Tabla de derivadas compuestas

En el apartado anterior hemos visto la tabla con las fórmulas de las derivadas de las funciones simples, pero… ¿cómo se deriva una función compuesta? En la siguiente tabla puedes ver todas las fórmulas de las derivadas compuestas.

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 9 \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = -3x \rightarrow f'(x) = -3$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$f(x) = (x^2 - 6)^3 \rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 6)^2 \cdot 2x$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \sqrt{5x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}}$
$f(x) = \sqrt[n]{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[3]{7x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{7}{3\sqrt[3]{(7x-1)^2}}$
$f(x) = e^u$	$f'(x) = e^u \cdot u'$	$f(x) = e^{3x} \rightarrow f'(x) = e^{3x} \cdot 3$
$f(x) = a^u$	$f'(x) = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$	$f(x) = 4^{x^3-1} \rightarrow f'(x) = 4^{x^3-1} \cdot \ln(4) \cdot 3x^2$
$f(x) = \ln(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	$f(x) = \ln(9x^2 + 3x) \rightarrow f'(x) = \frac{18x+3}{9x^2+3x}$
$f(x) = \log_a(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \log_7(4x) \rightarrow f'(x) = \frac{4}{4x \cdot \ln(7)}$
$f(x) = \text{sen}(u)$	$f'(x) = \cos(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sen}(x^4) \rightarrow f'(x) = \cos(x^4) \cdot 4x^3$
$f(x) = \cos(u)$	$f'(x) = -\text{sen}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cos(5x^2) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(5x^2) \cdot 10x$
$f(x) = \tan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2(u)} = (1 + \tan^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tan(10x) \rightarrow f'(x) = \frac{10}{\cos^2(10x)}$

Las derivadas compuestas son como las derivadas inmediatas, pero aplicando la regla de la cadena.

Como puedes ver, las fórmulas de las derivadas compuestas son como las inmediatas, pero multiplicando luego por la función de «dentro».

:

3. Tabla de derivadas trigonométricas

Como ya sabes, existen muchos tipos de funciones trigonométricas: las razones trigonométricas principales, las funciones hiperbólicas, las funciones trigonométricas inversas, … Por eso hemos hecho una tabla específica con las fórmulas de las derivadas trigonométricas.

:

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = \text{sen}(u)$	$f'(x) = \cos(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sen}(x^6) \rightarrow f'(x) = \cos(x^6) \cdot 6x^5$
$f(x) = \cos(u)$	$f'(x) = -\text{sen}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cos(6x^4) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(6x^4) \cdot 24x^3$
$f(x) = \tan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2(u)} = (1 + \tan^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tan(2x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{4x}{\cos^2(2x^2)}$
$f(x) = \sec(u)$	$f'(x) = \frac{u' \cdot \text{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x) = \sec(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot \text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}$
$f(x) = \text{cosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u' \cdot \cos(u)}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x) = \text{cosec}(x^5) \rightarrow f'(x) = -\frac{5x^4 \cdot \cos(x^5)}{\text{sen}^2(x^5)}$
$f(x) = \text{cotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x) = \text{cotg}(5x^2) \rightarrow f'(x) = -\frac{10x}{\text{sen}^2(5x^2)}$
$f(x) = \text{arcsen}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \text{arcsen}(7x) \rightarrow f'(x) = \frac{7x}{\sqrt{1-(7x)^2}}$
$f(x) = \arccos(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \arccos(3x) \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$f(x) = \arctan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = \arctan(6x) \rightarrow f'(x) = \frac{6}{1+(6x)^2}$
$f(x) = \text{arcsec}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arcsec}(2x) \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x \cdot \sqrt{(2x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arccosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arccosec}(5x) \rightarrow f'(x) = -\frac{5}{5x \cdot \sqrt{(5x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arccotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = \text{arccotg}(x^2-1) \rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f(x) = \text{senh}(u)$	$f'(x) = \cosh(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{senh}(x^3-2x) \rightarrow f'(x) = \cosh(x^3-2x) \cdot (3x-2)$
$f(x) = \cosh(u)$	$f'(x) = \text{senh}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cosh(3x^2) \rightarrow f'(x) = \text{senh}(3x^2) \cdot 6x$
$f(x) = \tanh(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cosh^2(u)} = (1 - \tanh^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tanh(3x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{9x^2}{\cosh^2(3x^3)}$
$f(x) = \text{sech}(u)$	$f'(x) = -\text{sech}(u) \cdot \tanh(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sech}(8x) \rightarrow f'(x) = -\text{sech}(8x) \cdot \tanh(8x) \cdot 8$
$f(x) = \text{cosech}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}(u) \cdot \text{cotgh}(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{cosech}(x^2) \rightarrow f'(x) = -\text{cosech}(x^2) \cdot \text{cotgh}(x^2) \cdot 2x$
$f(x) = \text{cotgh}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}^2(u)$	$f(x) = \text{cotgh}(11x) \rightarrow f'(x) = -\text{cosech}^2(11x) \cdot 11$
$f(x) = \text{arcsenh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$f(x) = \text{arcsenh}(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{(3x)^2+1}}$
$f(x) = \text{arccosh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arccosh}(7x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{\sqrt{(7x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arctanh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = \text{arctanh}(3x-1) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{1+(3x-1)^2}$
$f(x) = \text{arcsech}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \text{arcsech}(9x^3) \rightarrow f'(x) = -\frac{27x^2}{9x^2 \cdot \sqrt{1-(9x^3)^2}}$
$f(x) = \text{arccsch}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1+u^2}}$	$f(x) = \text{arccsch}(10x) \rightarrow f'(x) = -\frac{10}{10x \cdot \sqrt{1+(10x)^2}}$
$f(x) = \text{arccoth}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = \text{arccoth}(6x^5) \rightarrow f'(x) = \frac{30x^4}{1-(6x^5)^2}$

4. Tabla de operaciones con derivadas

En este apartado tienes la tabla de derivadas con las operaciones que se pueden hacer con las funciones, esto es, la derivada de una suma, la derivada de una resta, la derivada de un producto y la derivada de un cociente.

:

Operación	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k \cdot u$	$f'(x) = k \cdot u'$	$f(x) = 7x^4 \rightarrow f'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$
$f(x) = \frac{k}{u}$	$f'(x) = \frac{-k \cdot u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{3}{4x} \rightarrow f'(x) = \frac{-3 \cdot 4}{(4x)^2} = \frac{-12}{16x^2}$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = 5x^2 + 4x \rightarrow f'(x) = 10x + 4$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = x^3 - 6x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x$
$f(x) = u + v - w$	$f'(x) = u' + v' - w'$	$f(x) = x^4 + \text{sen}(2x) - e^{5x} \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2\cos(2x) - 5e^{5x}$
$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$	$f(x) = x^5 \cdot \text{sen}(9x) \rightarrow f'(x) = 5x^4 \cdot \text{sen}(9x) + x^5 \cdot 9\cos(9x)$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^5} \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x^5 - (x^2 - 3) \cdot 5x^4}{(x^5)^2}$

5. Tabla de derivadas completa

A modo de resumen aquí tienes todas las derivadas habidas y por haber.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = \arctan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1 + u^2}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = \text{arcsec}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$f(x) = \text{arccosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \text{arccotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{1 + u^2}$
$f(x) = \sqrt[n]{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$f(x) = \text{senh}(u)$	$f'(x) = \cosh(u) \cdot u'$
$f(x) = e^u$	$f'(x) = e^u \cdot u'$	$f(x) = \cosh(u)$	$f'(x) = \text{senh}(u) \cdot u'$
$f(x) = a^u$	$f'(x) = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$	$f(x) = \tanh(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cosh^2(u)} = (1 - \tanh^2(u)) \cdot u'$
$f(x) = \ln(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	$f(x) = \text{sech}(u)$	$f'(x) = -\text{sech}(u) \cdot \tanh(u) \cdot u'$
$f(x) = \log_a(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \text{cosech}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}(u) \cdot \text{cotgh}(u) \cdot u'$
$f(x) = \text{sen}(u)$	$f'(x) = \cos(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{cotgh}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}^2(u)$
$f(x) = \cos(u)$	$f'(x) = -\text{sen}(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{arcsenh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$

:

$f(x) = \tan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2(u)} = (1 + \tan^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \operatorname{arccosh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
$f(x) = \sec(u)$	$f'(x) = \frac{u' \cdot \operatorname{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x) = \operatorname{arctanh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1 - u^2}$
$f(x) = \operatorname{cosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u' \cdot \cos(u)}{\operatorname{sen}^2(u)}$	$f(x) = \operatorname{arcsech}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1 - u^2}}$
$f(x) = \operatorname{cotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2(u)}$	$f(x) = \operatorname{arccsch}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1 + u^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcsen}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$f(x) = \operatorname{arccoth}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1 - u^2}$
$f(x) = \arccos(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$		
Operaciones con derivadas			
$f(x) = k \cdot u$	$f'(x) = k \cdot u'$	$f(x) = u + v - w$	$f'(x) = u' + v' - w'$
$f(x) = \frac{k}{u}$	$f'(x) = \frac{-k \cdot u'}{u^2}$	$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$		

INTRODUCCIÓN A LAS INTEGRALES

Vamos a dar una definición ortodoxa y luego ya lo *traduciremos* a un castellano asequible para todos los públicos:

"*El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o anti derivación. Es muy común en la ingeniería y en la ciencia; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución*".

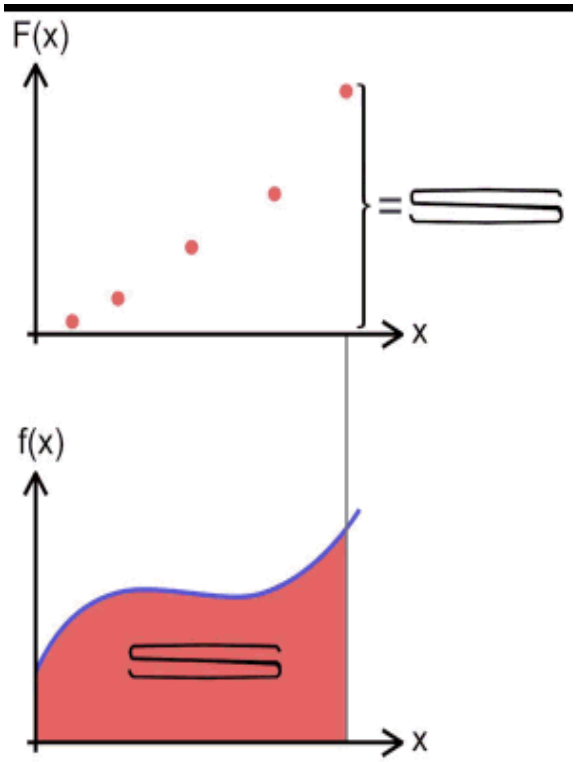
Esta definición queda muy molona pero lo real es que, aún no nos hemos sumergido en las *partes pornográficas* del tema y, ya nos empieza a sonar a Chino Cantonés. De todos modos, ya nos da una primera pista cuando nos habla de *anti derivación.* Luego volveremos a este punto.

De momento quédate con la película que derivada e integral son imágenes especulares.

Una Integral, dicho a lo bruto y sin anestesia ni nada, es una herramienta matemática que nos sirve para calcular el área de una figura geométrica, en la que uno de sus extremos describe una curva.

:

Algo así:



Observa que en este dibujo aparecen dos representaciones gráficas:

La de arriba se llama F(x) y representa una serie de 5 puntos. Para obtener esos puntos usamos DERIVADAS.

La de abajo se llama f(x) y representa una figura geométrica cuyo lado superior es justamente la unión de los 5 puntos de la figura superior. La zona de color rosa es el área comprendida entre la línea de puntos y los ejes f(x) y x. Para calcular esa área usaremos INTEGRALES.

En resumen: La DERIVADA es respecto de un punto, mientras que la INTEGRAL lo es respecto de un área.

Autor: Kubrikov. Instituto Conjunto de Altas Temperaturas de la Academia de Ciencias de Rusia. Tomado de Wikipedia.

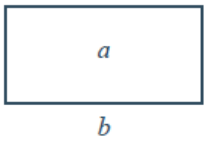
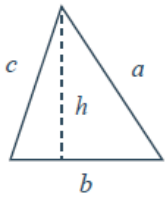
¿Y esto para qué narices sirve?

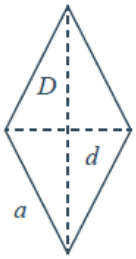
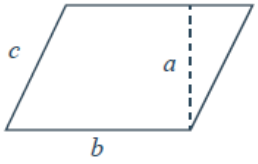
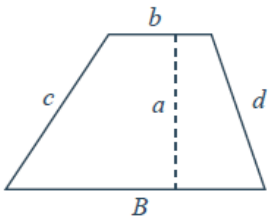
Cuando queremos calcular el área de una superficie geométrica cuyos lados son siempre una recta, disponemos de una serie de sencillas formulas trigonométricas.

Acto seguido os dejo un recorte de un PDF creado por el Gobierno de Canarias sobre Fórmulas de áreas y perímetros de figuras geométricas planas.

Como podéis ver, los cálculos son más simples que la electrónica de un botijo:

:

CUADRADO	RECTÁNGULO	TRIÁNGULO
		
$A = l^2$	$A = b \cdot a$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
$P = 41$	$P = 2(a+b)$	$P = a+b+c$

ROMBO	ROMBOIDE	TRAPECIO
		
$A = \frac{D \cdot d}{2}$	$A = b \cdot a$	$A = \frac{B+b}{2} \cdot a$

Fuente: Recursos pedagógicos en línea del Gobierno de Canarias.

El problema es que esas formulas son inútiles para calcular el área de una figura geométrica, en la que uno de sus extremos describe una curva. Pongamos un ejemplo: Imagina que somos una empresa constructora y tenemos dos clientes que nos piden que les construyamos una piscina.

El cliente A nos pide la típica piscina rectangular de 5 metros de largo por 4 de ancho y 2 metros de profundidad. Su superficie es de 5 * 4 = 20 metros cuadrados y su capacidad es de 5 * 4 * 2= 40.000 metros cúbicos[3] de agua.

Hasta aquí, todo bien.

El cliente B es el amigo Sergio Pelines Sarmiento Martín, forofo de la música rock y nos pide que la piscina tenga la forma de su guitarra eléctrica favorita.

[3] Un metro cúbico equivale a 1.000 litros. Por lo que estamos hablando de 40.000 litros de agua.

:

Autor: El amigo Sergio Pelines Sarmiento Martín, sosteniendo un "guitarraso" eléctrico. Muchas gracias por tu generosidad, amigo.

Sin las integrales, calcular el área y volumen de agua de tan extravagante piscina sería una pesadilla imposible de realizar. Como podéis apreciar, una guitarra eléctrica no tiene de recto nada más que el mástil. Por todas las curvas que tiene, las integrales son imprescindibles.

Ahora retomamos la famosa *anti derivación*. Al ser como una imagen especular, su mecánica va al revés de lo que hemos hecho para derivar. Pongamos una tabla y expliquémoslo mejor:

:

Función El exponente es n x^n	x^2	x^4	x^9	$3x^4$	$8x^3$	$3x^8$
Derivada: El exponente es n-1	$2x$	$4x^3$	$9x^8$	$12x^3$	$24x^2$	$24x^7$
Integral / Antiderivada: El exponente es n+1	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{10}}{10}$	$\frac{3x^5}{5}$	$\frac{8x^4}{4}$	$\frac{3x^9}{9}$
¿La Integral se puede simplificar?	NO	NO	NO	NO	SI $2x^4$	SI $\frac{x^9}{3}$

Fuente: Elaboración propia, sobre datos extraídos del Canal "El Profe", *Introducción a las Derivadas.*

Así pues, mientras que en la derivada bajábamos el exponente en un 1, en la integral, el exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Caso que la función tenga un número delante, lo dejamos tal y como está, e integramos. A modo de ejemplo:

$$\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{3}{5}x^5$$

Nótese que si derivamos el resultado de una integral obtenemos la función que se está integrando. Esta es una forma de comprobar si la integral quedó bien resuelta.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}x^5\right) = 5 \cdot \frac{3}{5}x^4 = 3x^4$$

:

Y ahora, sin anestesia ni nada, con dos *cohones*, nos tiramos a la piscina:

$$\int (x^3 + 5x^2 + 3x + 2)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$$

¿Cómo lo hemos hecho?:

1. Los tres primeros términos de la integral $(x^3 + 5x^2 + 3x)$ no tienen ningún secreto. Simplemente, hemos aplicado $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ y nos quedamos tan panchos.

2. A la integral de cualquier número sólo, se le agrega una x, por eso al integrar, el 2 lo hemos convertido en 2x. (Recuerda que cuando derivábamos, la derivada de 2x era igual a 2).

3. Una integral indefinida[4] como esta, siempre se acaba añadiendo una C o una K al final, que simbolizan una CONSTANTE.
   - ✓ Recuerda que, cuando derivábamos, la derivada de un número solo era igual a 0.
   - ✓ Ponemos la C o la K, porque al ser una integral no definida, no tenemos forma alguna de determinar (=saber) cuál era ese número.

Vamos a hacer una ruta completa que nos va a llevar desde una función inicial, para luego hacerle su derivada y luego, a partir de ésta, obtener su integral.

A partir de una función, primero la derivaremos y luego, agarramos la derivada y le haremos su integral:

Sea la función

$$y = 4x^2 + 5x - 3$$

Al derivarla nos queda

$$y' = 8x + 5$$

[4] Una integral definida suele producir un valor; a diferencia de una integral indefinida, que produce una función.

:

Y ahora vamos a hacer su Integral:

$$\int (8x+5)\,dx = \int 8x\,dx + \int 5dx = \frac{8x^2}{2} + 5x + C$$

$$\int (8x+5)\,dx = 4x^2 + 5x + C$$

Aunque ya no debería ser un problema a estas alturas, vamos a poner una fracción de por medio y veamos qué pasa:

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) dx = \frac{2x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C$$

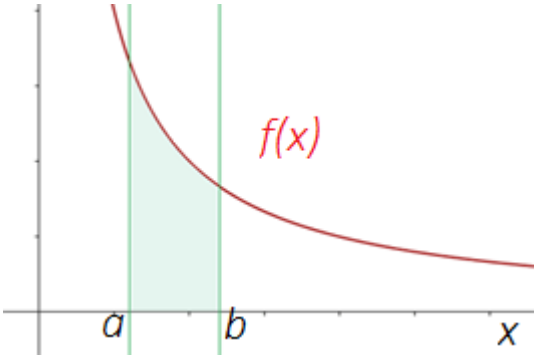
$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + C\,dx$$

Vamos a hablar ahora de las Integrales definidas y, para ello, he recurrido a unos apuntes extraídos de: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integral-definida.html

1. Integral definida
2. Propiedades de la integral definida
3. Regla de Barrow
4. Teorema fundamental del cálculo
5. Teorema de la media o del valor medio para integrales
6. Función integral

Integral definida

Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b)]$, la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



:

¿Qué es cada cosa en una integral definida?

Una integral definida está compuesta por 5 elementos:

1. La **integral definida** se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

2. ∫ es el signo de integración.
3. ***a*** es el límite inferior de la integración.
4. ***b*** es el límite superior de la integración.
5. $f(x)$ es el **integrando** o función a integrar.
6. dx es el **diferencial** de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1. El valor de la **integral definida** cambia de signo si se permutan (*se cambia el orden de*) los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la **integral definida** vale **cero**. Ejemplo: Si vivo en Barcelona y quiero viajar a Valencia, pero no salgo de mi casa, la distancia recorrida en el viaje es cero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. Si c es un punto interior del intervalo $[a,b]$, la i**ntegral definida** se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

:

4. La **integral definida** de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

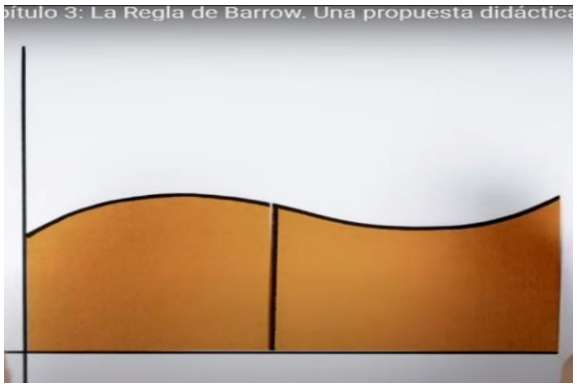
$$\int k \cdot f\,(x)dx = k \int f\,(x)dx$$

Regla de Barrow

La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $g(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

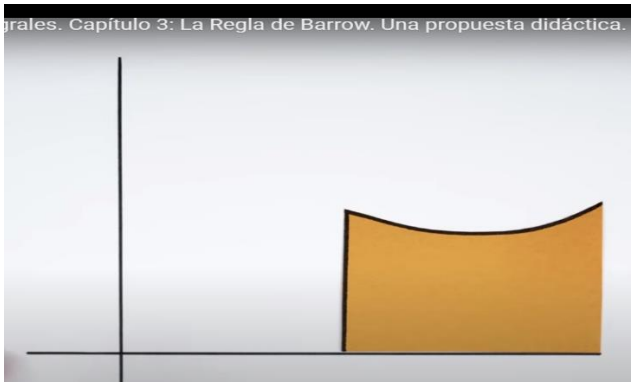
$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Según el profesor YouTuber Bruno Bernal, esta regla sirve para calcular trozos de Áreas. Lo que quiso decir Barrow es que, si tengo una función y quiero calcular el área que queda entre dicha función y el eje x, tenemos que calcular el área completa:



y luego restarle el trozo que NO nos interesa, en este caso, el trozo de la izquierda:

:



Autor: Bruno Bernal. Capturas de pantalla del video *Curso de Integrales. Capítulo 3: La Regla de Barrow. Una propuesta didáctica.* https://www.youtube.com/watch?v=YEensJZPE6c

Teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

El **Teorema Fundamental del Cálculo** nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas, además de describir la mecánica de operación de las integrales definidas.

Por eso, dada la integral definida entre a y b, de la función $f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1. Buscamos la antiderivada $F(x)$ definida entre *a* y *b*.

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

2. Luego hacemos la resta entre la antiderivada $F(b)$ y la antiderivada $F(a)$

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: Integral definida Ejercicio 1 JulioProfe.

Autor: JulioProfe. Capturas de pantalla de video INTEGRAL DEFINIDA - Ejercicio 1. https://www.youtube.com/watch?v=wuI5MFhvgsY

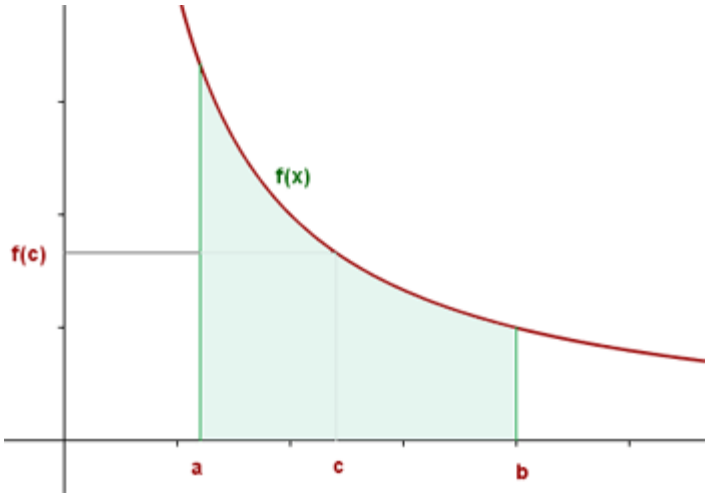
:

$$\int_{-3}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-3}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{27}{3} = \frac{35}{3}$$

Teorema de la media o del valor medio para integrales

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un punto c en el interior del intervalo tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$



Función integral

Sea $f(t)$ una **función continua** en el intervalo $[a, b]$.

A partir de esta función se define la **función integral**:

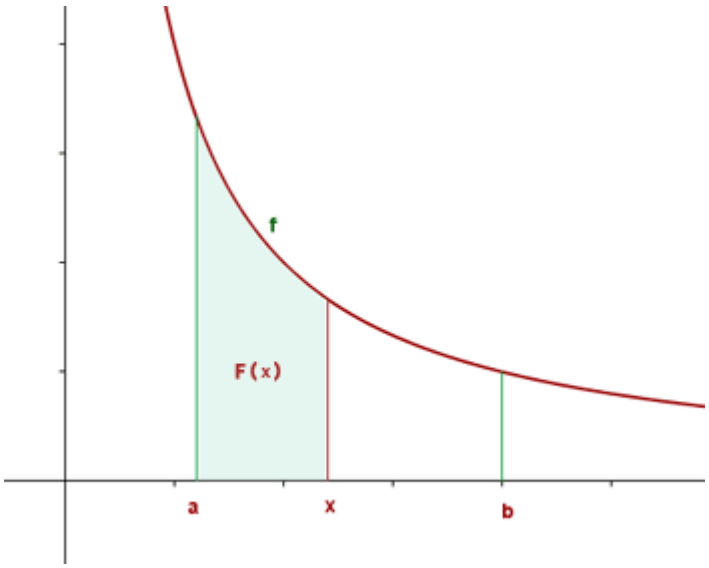
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

que depende del límite superior de integración.

Para evitar confusiones cuando se hace referencia a la variable de f, se la llama t, pero si la referencia es a la variable de F, se la llama x.

:

Geométricamente la **función integral**, $F(x)$, representa el **área** del recinto limitado por la curva $y = f(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = a$ y $t = x$



A la **función integral**, $F(x)$, también se le llama **función de áreas** de f en el intervalo $[a, b]$.

A ver, todo esto está muy bien, pero vamos a darle unas explicaciones claras.

Lo primero de todo recordar que, en una integral definida, nos pasan dos cosas importantes:

1) Estamos averiguando cómo se comporta una función entre dos puntos determinados.
2) Como es una integral definida, siempre nos va a dar un número, no una función, como pasa en las integrales indefinidas.

Vamos a desarrollarlo un poquito más:

Estamos averiguando cómo se comporta una función entre dos puntos determinados. El punto inferior lo ponemos debajo y el superior arriba de la S gigante que representa el signo de integración, tal que así:

:

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

Haciendo una integral definida, paso a paso:

Sea,

$$\int_1^2 x^2\,dx$$

Paso 1: Las operaciones matemáticas son las mismas que en las integrales indefinidas, es decir, primero buscamos la antiderivada de la función: El exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ o sea:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=1}^{x=2}$$

Paso 2: Ahora vamos a evaluar los límites de la integración, lo que en cristiano quiere decir que tenemos que substituir la x, primero por el límite superior y luego por el límite inferior. No lo digo yo, sino el Teorema Fundamental del Cálculo. Así que vamos a substituir la x por los límites de la integral y operamos. La cosa va a quedar así:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}3333$$

Por ello, mi querido/a lector/a, te invito a que te sumerjas en YouTube y busques a aquel profesor/a que te explique las cosas de la manera que te resulte más comprensible para ti. Te dejo un listado de aquellos profesores YouTubers que más me han gustado y de los que he tomado parte de las explicaciones que aparecen en este trabajo.

Aparte comentar que hay una pléyade de profesores de Hispanoamérica y España que te pueden dar clases particulares online.

:

Con mis mejores deseos de superación para ti.

Barcelona, enero de 2024.

LISTADO DE PROFESORES YOUTUBERS CONSULTADOS EN ESTE ARTÍCULO

- **Bruno Bernal.** Canal de YouTube donde encontrarás la teoría, explicada de una forma muy sencilla, de temas de matemáticas, como Ecuaciones, Potencias, Derivadas e Integrales. Su titular es Bruno Bernal, licenciado en Psicología con la especialidad de Educación, Ingeniero de Edificación y Arquitecto Técnico. https://www.youtube.com/playlist?list=PLwkJeiatsbfZ1plQSW_guGcJzk3kKBc6u
- **Matemáticas profe Alex**. Su titular es Alexander Gómez, Licenciado en Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

  https://www.youtube.com/@MatematicasprofeAlex/playlists

- **El Profe.** Su titular es Braulio Mendoza, profesor de Calculo diferencial e integral, matemáticas superiores, ecuaciones diferenciales, física moderna y probabilidad y estadística. Actualmente es Coordinador Técnico de Capacitación Mantenimiento en VivaAerobus, en México.

  https://www.youtube.com/@ElProfe1977/playlists

- **Julioprofe.** Su titular es Julio Alberto Ríos Gallego (Cali, 22 de marzo de 1973), más conocido como Julioprofe, es un ingeniero civil, profesor, conferencista, tutor y youtuber colombiano. https://www.youtube.com/@julioprofe

- **Profesor10demates**. Su titular es Sergio Castro, un ingeniero técnico industrial por la Universidad de León (España), y que cuenta

:

con el Grado Superior de Ingeniería Mecánica por la UNED. Profesor de Matemáticas, Física y Química desde hace 15 años y apasionado del vibrante mundo de las ciencias. Si buscas un profesor polifacético que te enseñe Matemáticas, Física y Química, te aconsejo a este hombre simpático y cariñoso, se ha ganado su éxito en YouTube por derecho propio.

https://www.youtube.com/@profesor10demates

- **Blue Dot.** Paulo César Churata Huamaní es un físico peruano que enseña Matemáticas y Física mediante animaciones realizadas en Python, un programa de animaciones que le imprime una forma novedosa y muy didáctica. https://www.youtube.com/@BlueDot96